877. V. Gantmacher ノ論文ニツイテノ一注意

國澤 清典 (阪大)

近着ノ Recueil Math. (T. 7 (47): 2 (1940)) ニ V. Gantmacher ガ weakly completely continuous operator ニ関シテ次ノ様ナ興味アル定理ヲ証明シテイル。

$\boxed{\text{定理}}$ 與ヘラレタル operator ト其ノ conjugate operator ハ常ニ同時ニ weakly completely continuous デアル。

此処ニ weakly completely continuous operator[1] トハ Banach 空間ノ有界ナ集合ヲ同ジ空間内ノ weakly compact ナ集合ニ移ス linear operator ノコトデアル。此処デ注意シタイノハ此ノ定理ハ實ハ corollary トシテ次ノ事実ヲ含ンデイルノデアル。換言スレバ次ノ系ノ簡単ナル別証明ヲ與ヘテホル。

$\boxed{\text{系}}$ Banach 空間 E ト其ノ conjugate space $\bar{E}$ トハ常ニ同時ニ locally weakly compact デアル。

此ノ系ハ定理ノ証明ノ眞似ヲスレバ出来ルガ深宮氏モ云ハレルヤウニ定理ニ於ケル weakly completely continuous operator ノ代リニ locally weakly compact ナ Banach 空間ニ於ケル unit operator ト考ヘレバヨイワケデアル。故ニ定理トコノ系トノ間ニハ本質上ノ差異ヲ認メナイガ定理ニ於テハ operator デ話ヲ進メテイル点ガヨリ一般ナワケデアル。

定理ノ証明ソノモノモ面白イト思ハレルノデ省カレタ点ヲ補充シナガラソレヲ述ベルモ無駄デハナイト思フ。証明ヲ述ベル前ニ lemma ヲ述ベテ置ク。

$\boxed{\text{lemma 1}}$ E_1 ヲ $\bar{E}$ ノ separable sub-space

1) K. Yosida. Proc. Imp. Acad. Tokyo, XIV, N.8 (1938), P.292. S. Kakutani. ibid. P.294.

トスル。E_1デ定義サレタ linear functional $F(f)$ スベテニ對シ

$$F(f) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad |x_n| \le |F| + \frac{1}{n}$$

$$(n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

ナル様ナ系列 $\{x_n\}$ ガ存在スル。

$\boxed{\text{証明}}$ E_1 ハ closed ト考ヘテ差支ヘナイ。E_1 ハ separable ナル故ニ E_1 ニ於テ everywhere dense ナ集合ヲ $f_1, \cdots\cdots, f_k, \cdots\cdots$ トスル。次ニ Helly ノ定理ヨリ $k = 1, 2, \cdots\cdots, n$ ニ對シテ

$$f_k(x_n) = F(f_k) \quad |x_n| \le |F| + \frac{1}{n}$$

ナル様ナ x_n ヲ作ルコトガ出来ル。此ノ様ニ作ラレタ $x_1, \cdots \cdots, x_n, \cdots\cdots$ ニ関シテハ

$$|x_n| \le |F| + \frac{1}{n} \qquad n = 1, 2, \cdots\cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} f_k(x_n) = F(f_k) \qquad k = 1, 2, \cdots\cdots$$

然ルニ $f_1, f_2, \cdots\cdots, f_k, \cdots\cdots$ ハ E_1 デ everywhere dense ナル故ニ E_1 ニ於テ

$$F(f) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \qquad |x_n| \le |F| + \frac{1}{n}$$

ヲ得ル。

$\boxed{\text{lemma 2}}$ Banach 空間 E ノ單位球ガ点列トシテ denumerably closed ナルコトト E ノ單位球ガ点列トシテ weakly compact ナルコトト同等デアル。

$\boxed{\text{証明}}$ 此レハ本紙上談話ニ於テ何時カ樋口氏ガ

V. Šmulian ノ論文紹介[2)]ニ於テ証明ト共ニ紹介シマシタカラ此処デハ割愛スル。

$\boxed{\text{定理ノ証明}}$ 先ヅAヲ weakly completely continuous トシテ, ソノ conjugate operator A^*モ亦コノ性質ヲ有スルコトヲ証明スル。$\{f_n\}$ヲ Banach 空間 $\bar{E}$ ノ $|f_n| \leq 1$ ナル系列トスル。

$$f_n^* = A^* f_n$$

ト置クト $|f_n| \leq 1$ ナル假定ヨリ

$$\underline{\lim}\ f_n(x) \leq f_0(x) \leq \overline{\lim}\ f_n(x), \quad x \in E$$

ナル functional f_0 が存在スル。[3)] 次ニ $\{f_n^*\}$ ト $f_0^* = A^* f_0$ ヲ含ム separable デ closed ナ sub-space $E^* \subset \bar{E}$ ヲ作ル。Lemma ノヨリスベテノ $F \in \bar{\bar{E}}$ ニ對ツ

$$F(f) = \lim_{k \to \infty} f(x_k), \qquad (f \in E^*)$$

が成立スル．従ツテAノ weakly completely continuous ナルコトト $|x_k| \leq |F| + 1$ ナル故ニ

$$F(f_n^*) = \lim_{k \to \infty} f_n^*(x_k)$$

$$= \lim_{k \to \infty} f_n[A(x_k)] = f_n(y), \quad n = 0, 1, \cdots$$

依ッテ

---

2) 第189号, 談話820, P.545, 定理2.

3. S. Banach: Théorie des operation linéaires P. 118.

$$\underline{\lim}\, F(f_n^*) = \underline{\lim}\, f_n(y) \leq f_0(y) \leq \overline{\lim}\, f_n(y)$$
$$= \overline{\lim}\, F(f_n^*)$$

即チ

$$\underline{\lim}\, F(f_n^*) \leq F(f_0^*) \leq \overline{\lim}\, F(f_n^*)$$

此レハ lemma 2 ヨリ $\{f_n^*\}$ ノ点列トシテノ weakly compact ナ事ヲ示シテイル。

今度ハ A^* ガ weakly completely continuous デアルト假定スル。スベテノ $f \in \overline{E}$ ニ對シテ

$$F(f) = f(x) \qquad (x \in E)$$

ガ成立スルヤウナ $F \in \overline{\overline{E}}$ ヲ考ヘル。容易ニ $|F| = |x|$ ナルコトガ分ル。依ツテ斯ル F ノ集合ハ E ニ equivalent デアル様ナ sub-space $E_1 \subset \overline{\overline{E}}$ ヲ作ル。E ノ單位球ニ對應スル E_1 ノ部分集合ヲ考ヘルト A^* ノ conjugate operator A^{**} ハ A ノ extension デアルカラ此ノ E_1 ノ部分集合ヲ E_1 ニ屬スヤウナ $\overline{\overline{E}}$ ニ於テ点列トシテ weakly compact ナ集合ニ移ス。E_1 ハ $\overline{\overline{E}}$ ニ於テ convex デ closed ナ集合デアルカラ E_1 ハ weakly closed デアル。依ツテ A ハ $|x| \leq 1$ ナル球ヲ weakly compact set ニ移ス。

—— 以上 ——